Analiza Matematyczna M3, Wydział Matematyki, lista 2

Zadanie 1. Korzystając z definicji, oblicz całkę $\int_K xy\, d(x,y)$, gdzie $K = [0,2] \times [1,3]$.

Zadanie 2. Dana jest funkcja

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } x, y \in \mathbb{Q}, \\ 1, & \text{gdy } x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 2, & \text{gdy } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q}, \\ 3, & \text{gdy } x, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Oblicz $\overline{\int_K} f(x,y)\, d(x,y)$ i $\underline{\int_K} f(x,y)\, d(x,y)$ gdy $K = [a,b] \times [c,d]$.

Zadanie 3. Niech $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ będzie niemalejąca względem każdej zmiennej z osobna, gdy wartość pozostałej zmiennej jest ustalona. Wykaż, że taka funkcja jest całkowalna na $K = [a,b] \times [c,d]$.

Zadanie 4. Niech $D \subset \mathbb{R}^n$ będzie zwarty i niech $f : D \to \mathbb{R}$ będzie ciągła na S. Wykaż, że hiperpowierzchnia w $\mathbb{R}^{n+1}$ określona wzorem $x_{n+1} = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, $(x_1, x_2, ..., x_n) \in S$ ma zerową miarę Jordana w $\mathbb{R}^{n+1}$.

Zadanie 5. Niech f będzie funkcją ograniczoną na zbiorze ograniczonym $D \subset \mathbb{R}^n$, Załóżmy, że $f = 0$ poza zbiorem o zerowej mierze Jordana w $\mathbb{R}^n$. Wykaż, że f jest całkowalna na D i $\int_D f(X)\, dX = 0$.

Zadanie 6. Niech $D \subset \mathbb{R}^n$ będzie ograniczony. Załóżmy, że $\int_D g(X)\, dX$ istnieje i niech h będzie funkcją ograniczoną na D i taką, że $g(X) = h(X)$ poza zbiorem o zerowej mierze Jordana. Wykaż, że wówczas h też jest całkowalna na D i zachodzi równość $\int_D g(X)\, dX = \int_D h(X)\, dX$.

Zadanie 7. Oblicz całkę $\int_K \lfloor x + y \rfloor\, d(x,y)$, gdy $K = [0,2] \times [0,2]$.

Zadanie 8. Na kwadracie $K = [0,1] \times [0,1]$ określona jest funkcja $f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } x \in \mathbb{Q}, \\ 2y, & \text{gdy } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$
Wykaż, że $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\, dy \right) dx = 1$, ale f nie jest całkowalna na K.

Zadanie 9. Załóżmy, że istnieją całki $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ oraz $\displaystyle\int_c^d g(y)\, dy$. Wykaż, że wówczas:
a) Istnieją całki $\displaystyle\int_K f(x)\, d(x,y)$ oraz $\displaystyle\int_K g(y)\, d(x,y)$, gdzie $K = [a,b] \times [c,d]$.
b) Istnieje całka $\displaystyle\int_K f(x)g(y)\, d(x,y)$.
c) Zachodzi równość $\displaystyle\int_K f(x)g(y)\, d(x,y) = \left(\int_a^b f(x)\, dx \right) \left(\int_c^d g(y)\, dy \right)$.

Zadanie 10. Niech f będzie ograniczona na $[a,b]$. Załóżmy, że istnieje całka $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$. Rozpatrując całkę $\displaystyle\int_K [f(x) - f(y)]^2\, d(x,y)$, gdzie $K = [a,b] \times [a,b]$, udowodnij nierówność

$$\left(\int_a^b f(x)\, dx \right)^2 \leqslant (b-a) \int_a^b f^2(x)\, dx.$$